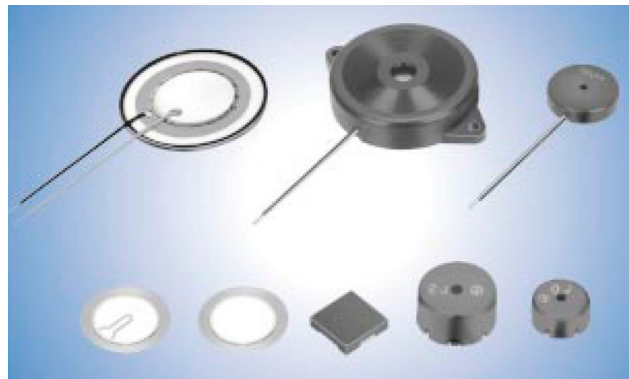
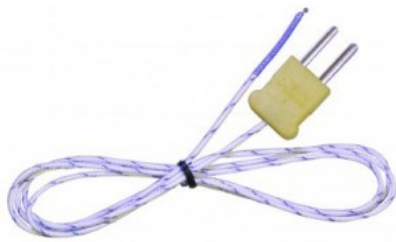
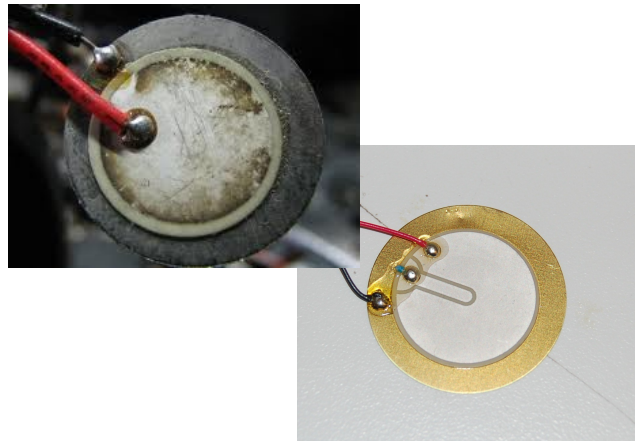


Instrumentação e Técnicas de Medidas

Sensores Termoelétricos e Piezoelétricos



Controle de Versões

2013 Versão 1 – Instrumentação e Técnicas de Medidas (ITM)
Com base nas notas de aula de COB783, [Hardware and Housekeeping Techniques](#),
[Circuit Board Layout Techniques](#) e [Noise Reduction Techniques in Electronic Systems](#).

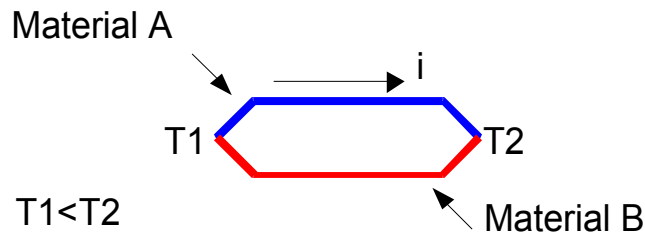
Última alteração: 11/10/2013

Índice

22 Transdutores Termoelétricos.....	4
23 Transdutores Piezoelétricos.....	9
23.1 Análise fenomenológica.....	10
23.2 Transdutor piezoelétrico no modo direto e com carga.....	23

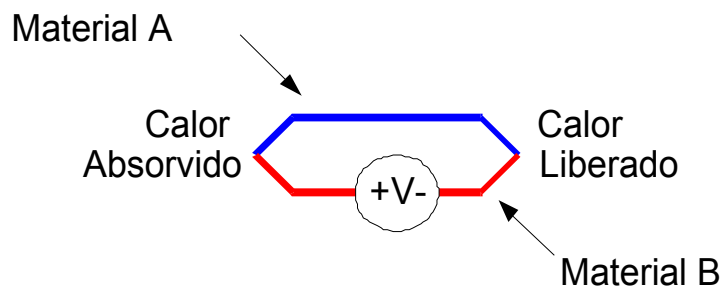
22 Transdutores Termoelétricos

Em 1823 Seebeck descobriu que se 2 metais diferentes forem conectados em um circuito com as junções em temperaturas diferentes, uma certa corrente fluiria no circuito.



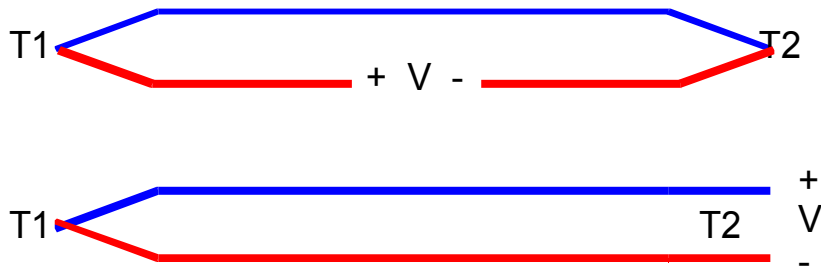
Tal fenômeno envolve a absorção de calor pela chamada junção fria (T_f) e liberação de calor pela junção quente. A força eletromotriz de Seebeck, responsável pela corrente circulante depende dos tipos dos metais envolvidos e é aproximadamente proporcional a diferença de temperatura entre as duas junções.

Peltier (1834) demonstrou o efeito inverso através da introdução de uma bateria no circuito composto por 2 metais diferentes e da constatação de que o calor era absorvido em uma das junções e irradiado na outra.



Tal efeito é a base da refrigeração Termoelétrica.

Na sua forma mais simples um termopar tem o seguinte aspecto



A tensão de Seebeck pode ser expressa aproximadamente como

$$V = \alpha \cdot (T_2 - T_1) + \gamma \cdot (T_2^2 - T_1^2)$$

onde α e γ são constantes associadas do tipo de termopar.

Normalmente o valor de γ não é tão elevado, de modo que para uma boa faixa de temperatura o comportamento pode ser descrito como praticamente linear.

A sensibilidade do termopar, para uma dada temperatura T_2 é dada por

$$S = \frac{\partial V}{\partial T_2} = \alpha + 2 \cdot \gamma \cdot T_2$$
















































Outra possibilidade de configuração é a de somente uma junção (junção quente), onde o ponto de medição é considerado estar numa temperatura de referência.

Uma vez que a equação que descreve a tensão de Seebeck não é exata, ela pode ser usada para calibração para uma faixa muito extensa de temperatura. Normalmente os dados de calibração são tabulados medindo-se a tensão de Seebeck quando uma das junções é mantida na temperatura de gelo (0°C).

Os tipos de termopares são dependentes das ligas metálicas usadas para sua fabricação, onde normalmente o primeiro elemento do par corresponde ao elemento positivo, e em algumas normas o elemento negativo é pintado de vermelho.

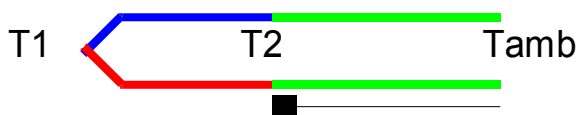
Ref	Material	Faixa	$\mu\text{V}/^\circ\text{C}$	Erro
B	Platina 30% Rodio/ Platina 6% Rodio	[0,1800]	3	0,5%
E	Cromel/Constantan	[-200, 1000]	63	$\pm 1,7^\circ\text{C}$ ou 0,5%
J*	Ferro/Constantan	[-200, 900]	53	$\pm 2,2^\circ\text{C}$ ou 0,75%
K*	Cromel/Alumel	[-200,1300]	41	$\pm 2,2^\circ\text{C}$ ou 0,75%
N	Nirosil/Nisil	[-200/1300]	28	
R	Platina/Platina 13%	[0 1400]	6	$\pm 1,5^\circ\text{C}$ ou 0,25%
S	Platina/Platina 10%	[0 1400]	6	$\pm 1,5^\circ\text{C}$ ou 0,25%
T*	Cobre/Constantan	[-200, 400]	43	$\pm 1^\circ\text{C}$ ou 0,75%

Os tipos mais comuns são J, K e T

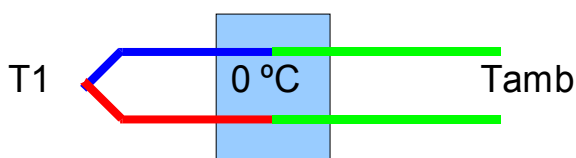
Cominação metálica							Limite de erro		
LIGAS	+ FIO	- FIO	Código de Cores ANSI MC-96.1	Internacional IEC 584-3	BS 1843	DIN 43710	JIS C1610-1981	Padrão	Especial
J	Fe (magnético)	Constantan Cu-Ni						2.2°C ou 0.75%	1.1°C ou 0.4%
K	Niquel-Cromo Ni-Cr	Niquel-Alum Ni-Al (magnético)						2.2°C ou 0.75%	1.1°C ou 0.4%
W*X	Cobre Cu	Cu-Ni							
T	Cobre Cu	constantan Cobre-Niquel Cu-Ni						1.0°C ou 0.75%	0.5°C ou 0.4%
E	Niquel-Cromo Ni-Cr	constantan Cobre-Niquel Cu-Ni						1.7°C ou 0.5%	1.0°C ou 0.4%
N	Nicosil Ni-Cr-Si	Nisil Ni-Si-Mg					não é padrão utilize cores norma ANSI	2.2°C ou 0.75%	1.1°C ou 0.4%
R	Platina 13% rorodio Pt-10% Rh	Platina Pt						1.5°C ou 0.25%	0.6°C ou 0.1%
S	Platina 10% rhodio Pt-10% Rh	Platina Pt						1.5°C ou 0.25%	0.6°C ou 0.1%
B	Platina 30% rhodio Pt-30% Rh	Platina 6% rhodio Pt-6% Rh			use fio de cobre			0.5°C ou 800°C	não estabilizado

Existem basicamente duas opções para se realizar a medida de temperatura com um termopar: 1) Usando-se uma temperatura de referência, normalmente um banho de gelo e um voltímetro para obter-se a tensão de Seebeck e posteriormente interpretando-se o valor medido através de uma tabela (o que pode ser feito manualmente ou por software); 2) Usando-se um indicador de temperatura dedicado com uma certa compensação de temperatura.

Os circuitos mais simples para a medição podem ser vistos a seguir. Note que a tensão do transdutor é aquela estabelecida somente entre os metais contidos entre a região quente e a região que define a temperatura de referência (normalmente o banho). A partir daí os dois condutores de cobre somente levam tal tensão para o voltímetro (que é considerado estar na temperatura ambiente), sem interferir na tensão proporcional a temperatura.



O esquema abaixo ilustra a utilização de fios de extensão e de um conector, ideal para casos onde o banho de referência não pode ficar próximo e o tamanho do sensor também não pode ser grande. Note que a temperatura da zona de conexão deve ser uniforme (igual para os dois fios).



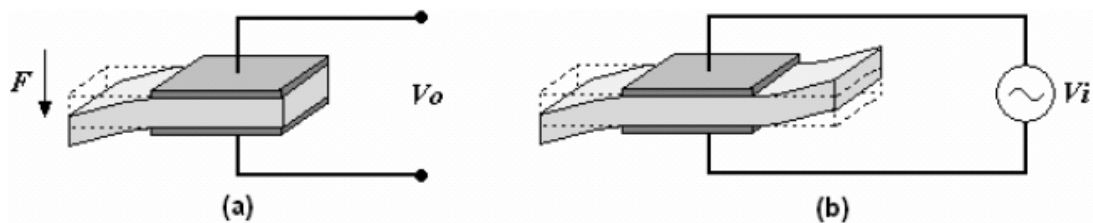
A diferença de temperatura entre duas pontas pode ser obtida com um arranjo onde neste caso os dois fios considerados negativos devem ser interligados e mantidos juntos em uma temperatura qualquer (normalmente a temperatura ambiente) e os fios positivos colocados um em cada ponto onde se deseja medir a diferença. A diferença de potencial entre os dois fios positivos é proporcional a diferença de temperatura entre os dois pontos considerados.

Temperatura (°C)	E	J	K	N	R	S	T
-200	25,1	21,9	15,3	9,9	-	-	15,7
-100	45,2	41,1	30,5	20,9	-	-	28,4
0	58,7	50,4	39,5	26,1	5,3	5,4	38,7
100	65,7	54,3	41,4	29,7	7,5	7,3	46,8
200	74,0	55,5	40,0	33,0	8,8	8,5	53,1
300	77,9	55,4	41,4	35,4	9,7	9,1	58,1
400	80,0	55,1	42,2	37,0	10,4	9,6	61,8

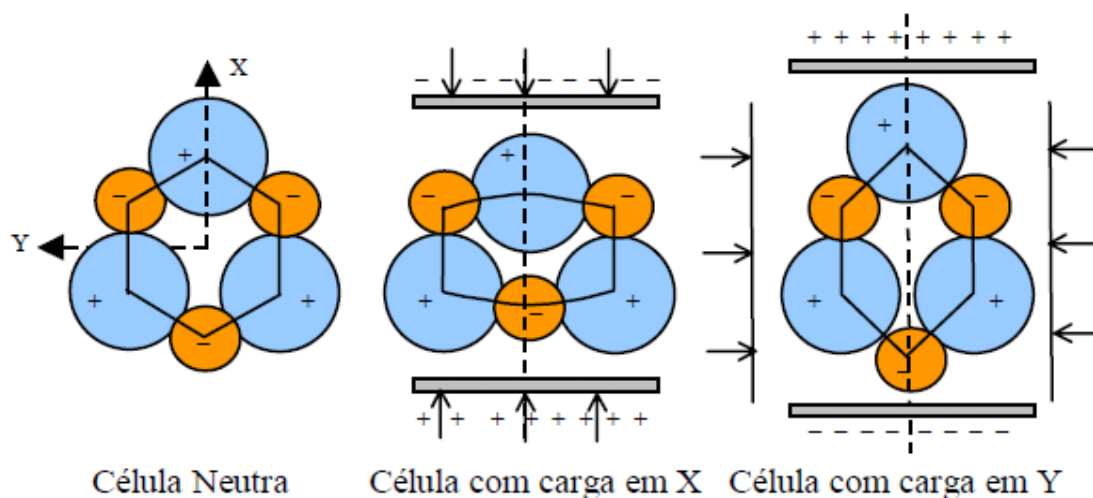
Temperatura (°C)	E	J	K	N	R	S	T
500	80,9	56,0	42,6	-	10,9	9,9	-
600	80,7	58,5	42,5	-	11,3	10,2	-
700	79,9	62,2	41,9	-	11,8	10,5	-
800	78,4	-	41,0	-	12,3	10,9	-
900	76,7	-	40,0	-	12,8	11,2	-
1000	74,9	-	39,8	-	13,2	11,5	-

23 Transdutores Piezoelétricos

Outro tipo bastante utilizado de transdutor passivo é o transdutor piezoelétrico, que produz um sinal elétrico de saída quando excitado mecanicamente. Além disto estes transdutores são recíprocos o que significa que se for aplicada ao transdutor uma certa tensão elétrica eles são capazes de produzir uma vibração mecânica. Devido a esta característica tais transdutores são muito utilizados na área biomédica como por exemplo em: a) microfones específicos para transdução de sons cardíacos; b) acelerômetros para medição de tremores; c) sensores ultrassônicos para medição de fluxo sanguíneo; d) sensores ultrassônicos para imageamento; e) dispositivos ultrassônicos para cirurgia.



A piezoeletricidade é um fenômeno associado a geração de cargas elétricas na superfície de um material quando a ele é aplicada uma certa tensão mecânica capaz de deformá-lo; ou a correspondente mudança da forma do material quando uma certa tensão elétrica é aplicada em algumas de suas superfícies. A piezoeletricidade é então uma maneira de converter-se energia mecânica em energia elétrica, ou vice-versa.

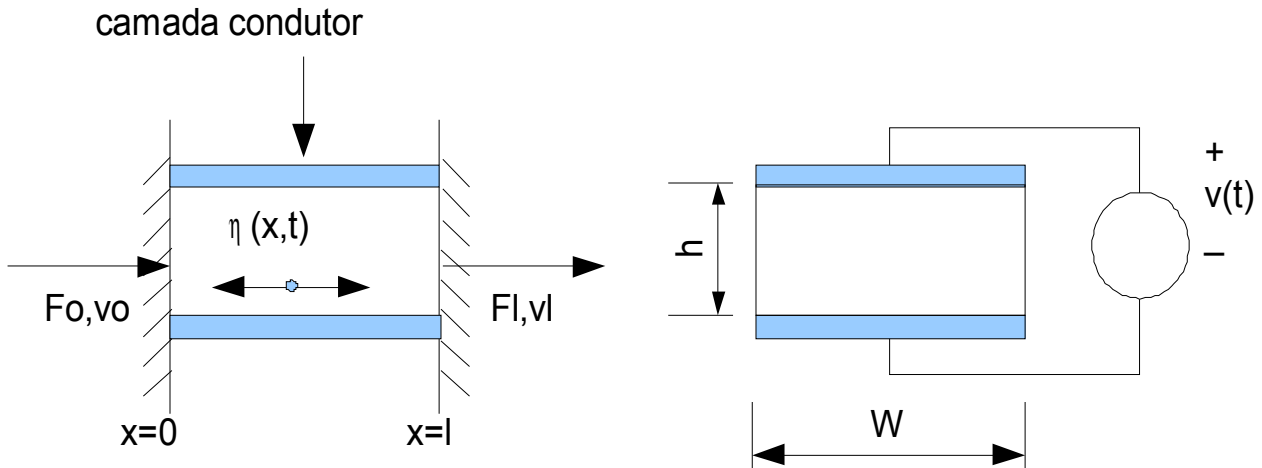


Os primeiros materiais piezoelétricos estudados foram o quartzo, a turmalina e os sais de Rochelle. Antigamente todos os cristais eram considerados materiais piezoelétricos, mas a partir de

1940 certas cerâmicas (titanite de bário e titanite de zircônio, especialmente) têm sido especialmente fabricadas como os materiais piezoelétricos mais usuais.

23.1 Análise fenomenológica

Considere o modelo abaixo como uma longa e fina barra de material piezoelétrico.

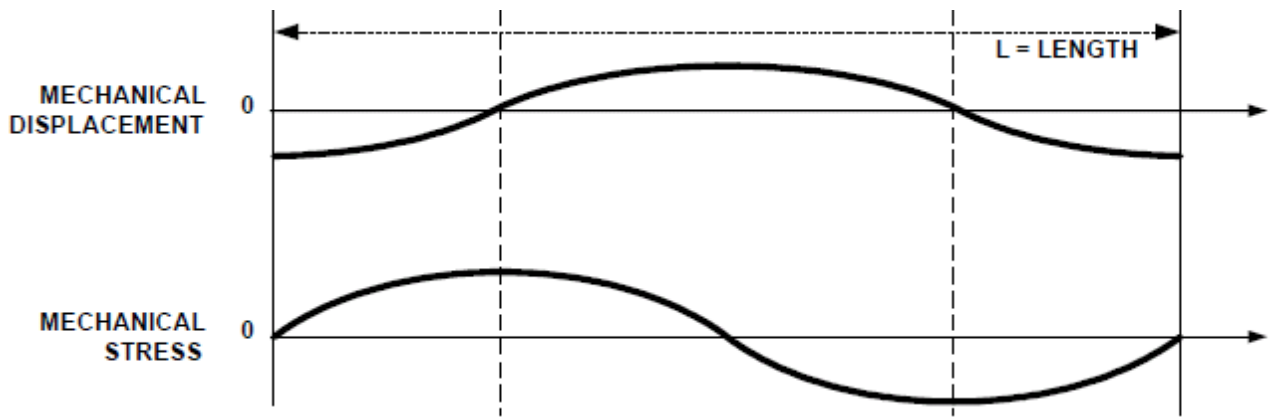


Consideremos que na face esquerda da barra seja aplicada uma força F_0 (aplicada a partir de algum meio externo) e que a tal força está associada uma velocidade local V_0 . Na face direita uma força F_2 será transmitida ao ei externo, com uma correspondente velocidade local v_l . Consideremos ainda que as perturbações só se propagam na direção x , fazendo com que o material da barra se desloque pontualmente de uma pequena distância η .

Suponha agora que por meio das finas camadas de material condutor uma tensão $v(t)$ seja aplicada à barra. Tal diferença de potencial resulta num campo elétrico uniforme com a distância. A densidade de corrente por sua vez é uma função da distância e do tempo, uma vez que o campo elétrico interagirá com o deslocamento mecânico, sendo a corrente externa $i(t)$ a integral de tal densidade de corrente.

Uma vez que o campo elétrico faz um ângulo reto com o movimento mecânico, tal configuração é chamada de modo transversal. O modo direto seria aquele onde o campo elétrico estivesse alinhado com a direção do movimento mecânico.

Suponha um distúrbio mecânico senoidal viajando na barra na direção x



Nos picos do deslocamento a tensão e a deformação são nulas pois não há nem compressão nem expansão.

Podemos escrever que

$$S = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

A lei de Hooke estabelece que para um dado material:

$$T = Y_0 \cdot S$$

onde é o módulo de Young (módulo de elasticidade) e T é a força sobre a área..

O fenômeno de polarização elétrica, por sua vez, pode ser expresso como

$$P_E = \zeta \cdot E$$

onde é o módulo do vetor de polarização, é a susceptibilidade, e E é o módulo do campo elétrico aplicado.

A susceptibilidade do material está relacionada com a constante dielétrica via

$$\zeta = \epsilon_0 \cdot (K - 1)$$

onde, para o vácuo, $\zeta = 0$ e $K = 1$.

Como grande parte dos materiais piezoelétricos possui uma alta constante dielétrica podemos aproximar

$$\zeta = \varepsilon_0 \cdot K$$

$$\text{e } K = 8,85 \times 10^{-12}$$

Se o material é piezoelétrico a lei de Hooke e a de polarização devem ser alteradas uma vez que há uma contribuição na deformação mecânica gerada pelo campo elétrico, assim como uma contribuição no vetor de polarização gerado pela tensão mecânica. Logo

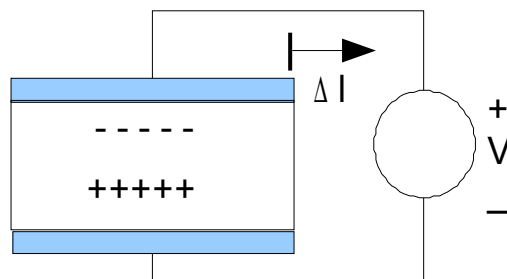
$$S = \frac{1}{Y_0} \cdot T + dp \cdot E$$

$$P_E = \zeta \cdot E + dp \cdot T$$

onde dp é a constante piezoelétrica.

Ilustremos tal característica pelos seguintes casos

No primeiro caso uma tensão V é aplicada e a barra piezoelétrica é expandida.



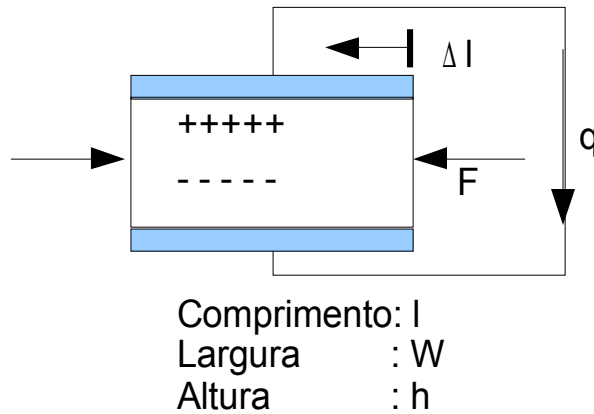
Comprimento: l
 Largura : W
 Altura : h

Uma vez que a barra não está carregada mecanicamente a tensão T é nula, consequentemente

$$dp = \frac{S}{E} = \frac{\Delta l / l}{V / h} = \frac{h}{V} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

onde h é a altura da barra.

No segundo caso uma força F é aplicada fazendo com que a barra se contraia (onde F e $\Delta l/l$ são considerados negativos).



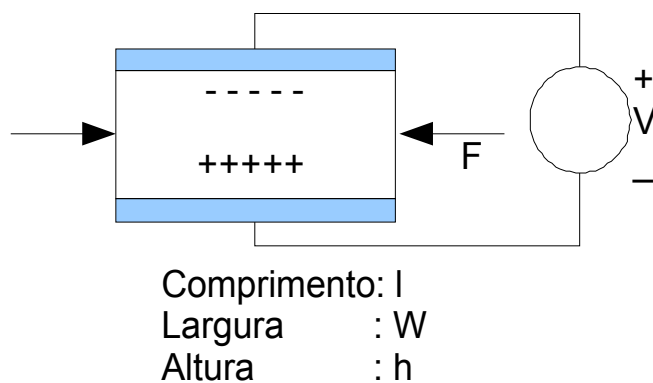
Se um curto-circuito é feito na barra, o campo elétrico externo é nulo, porém a força F causa o movimento de uma carga q , criando uma polarização negativa, como mostrada. Neste caso

$$P_E = dp \cdot T$$

$$\frac{q}{W \cdot l} = \frac{dp \cdot F}{W \cdot h}$$

$$q = \frac{dp \cdot F \cdot l}{h}$$

No terceiro caso, tanto uma força F , como uma tensão V , são aplicados simultaneamente.



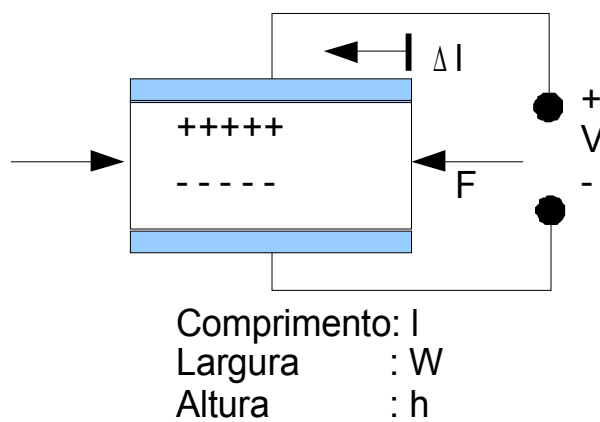
As magnitudes são ajustadas de modo que a força F negativa cancele exatamente uma tensão positiva V , de tal modo que o comprimento da barra permanece o mesmo. Neste caso

$$\frac{1}{Y_0} \cdot T = dp \cdot E$$

$$\frac{1}{Y_0} \cdot \frac{F}{W \cdot h} = dp \cdot \frac{V}{h}$$

$$F = dp \cdot W \cdot Y_0 \cdot V$$

No quarto caso, embora uma força F seja aplicada a transferência de carga não pode ocorrer em virtude do circuito aberto.



Neste caso uma tensão a circuito aberto (que decairá com o tempo) poderia ser medida, refletido o campo elétrico criado Neste caso

$$\zeta \cdot E = dp \cdot T$$

$$\zeta \cdot \frac{V}{h} = dp \cdot \frac{F}{W \cdot h}$$

$$V = \frac{dp \cdot F}{\zeta \cdot W}$$

Podemos definir a energia elétrica armazenada no primeiro e terceiro casos como iguais e dadas com

$$\frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

onde

$$C = \frac{W \cdot l \cdot \zeta}{h}$$

Obs.: Em baixas frequências os elementos piezoelétricos tem comportamento eminentemente capacitivo.

Nos casos onde ocorreu expansão da barra, podemos dizer que houve trabalho mecânico, uma vez que uma força F foi aplicada e houve um deslocamento Δl . Consideremos agora uma característica do material que será chamada de coeficiente de acoplamento K , definida como

$$K = \sqrt{\frac{\text{energia líquida de saída}}{\text{energia de entrada armazenada}}}$$

Pode ser demonstrado que

$$K = \frac{dp}{\sqrt{\frac{\zeta}{Y_0}}}$$

$$K = dp \cdot \sqrt{\frac{Y_0}{\zeta}}$$

As principais características de alguns materiais piezoelétricos pode ser vista abaixo. Note que algumas constantes são negativas, significando neste caso que o material é orientado de acordo com o eixo cristalográfico e que neste caso a aplicação de uma tensão V positiva causa uma contração em vez de uma expansão do comprimento l .

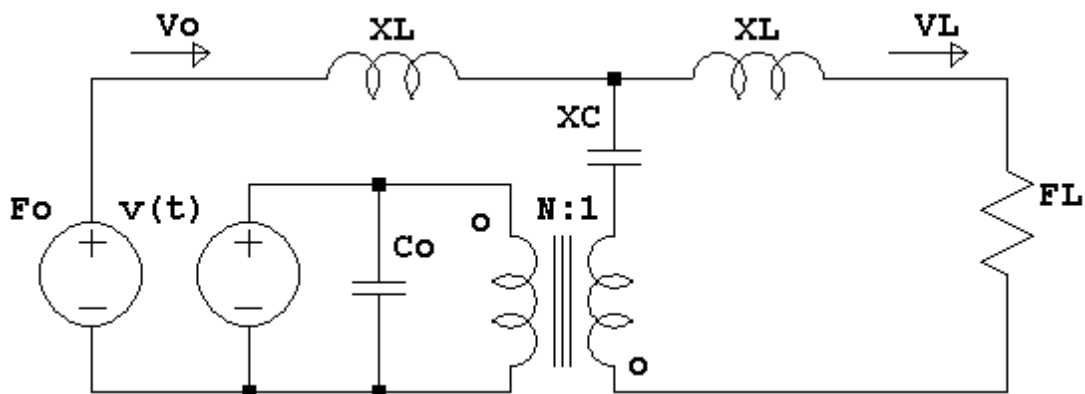
Propriedades	Unidades	PZT-4A	PZT-5A	PZT-5H
K(1kHz)	-	1400	1600	3400
tan(δ)	-	0,05	0,02	0,02
Ec	KV/cm	14,4	11,8	5,5
PR	$\mu\text{C}/\text{cm}^2$	31,0	23,0	12,9
Psat	$\mu\text{C}/\text{cm}^2$	40,1	27,7	19,5
kef	-	0,49	0,50	0,53
kp	-	0,54	0,56	0,59
$d_{33}(\times 10^{-12})$	m/V	225	350	585

Propriedades	Unidades	PZT-4A	PZT-5A	PZT-5H
$g_{33}(x10^{-3})$	Vm/N	8,5	16,6	12,5
k_{33}	-	0,35	0,53	0,59
$d_{31}(x10^{-12})$	m/V	-85	-190	-265
$g_{31}(x10^{-3})$	Vm/N	-7,5	-13,7	-8,5
k_{31}	-	0,22	0,40	0,36
Densidade	g/cm ³	7,6	7,7	7,4

K: Constante dielétrica; k: coeficiente de acoplamento; d_{xx} : coeficiente piezoelétrico (na direção xx); g_{xx} : coeficiente de tensão elétrica piezoelétrica.

Uma vez que o transdutor piezoelétrico é um dispositivo eletromecânico recíproco, torna-se conveniente analisarmos o seu desempenho do ponto de vista de um circuito elétrico. Em tal abordagem as características mecânicas devem ser modeladas por seus respectivos análogos elétricos.

Seja o seguinte modelo para um transdutor piezoelétrico.



onde o transformador é utilizado para acoplar as variáveis mecânicas a variáveis elétricas.

Neste modo de vibração do modelo considera-se que a velocidade de propagação da onda mecânica no dispositivo (velocidade de propagação do som) é dada por

$$v_s = \sqrt{\frac{Y_0}{\rho_D}}$$

assim como a sua impedância característica

$$Z_0 = \sqrt{Y_0 \cdot \rho_D} = v_s \cdot \rho_D$$

Supondo que a vibração mecânica oscila numa frequência angular ω o comprimento físico do transdutor representa um certo ângulo mecânico associado ao período de oscilação, ou uma certa fração do comprimento de onda.

$$2 \cdot \pi \rightarrow \lambda$$

$$\theta \rightarrow l$$

$$\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\frac{v_s}{f}}$$

$$\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot l}{v_s} = \frac{\omega \cdot l}{v_s}$$

No modelo as reatâncias X_L e X_C são definidas em função de tal ângulo mecânico e são dadas por

$$X_L = \frac{j \cdot h \cdot W \cdot Y_0}{v_s} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$X_C = \frac{j \cdot h \cdot W \cdot Y_0}{v_s} \cdot \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

De modo análogo a relação de espiras de um transformador (N) é dada por

$$N = \frac{1}{Y_0 \cdot dp \cdot W}$$

e a capacitância C_0 por

$$C_0 = \frac{e \cdot l \cdot W \cdot Y_0}{h}$$

$$\text{onde } e = \frac{\zeta}{Y_0} - dp^2$$

e se o material não for piezoelétrico ($dp=0$), tal valor se reduz a expressão de um capacitor de placas paralelas

$$C_0^* = \frac{\zeta}{Y_0} \cdot l \cdot \frac{W}{h} \cdot Y_0$$

$$C_0^* = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon_r - 1) \cdot \frac{A}{h}$$

Em aplicações biomédicas, normalmente as ressonâncias mais baixas são as usualmente utilizadas. Isto é, aquelas onde o comprimento do transdutor corresponde a $\lambda/2$, ou seja, $\theta = \pi$ (também chamada de modo 180°). Então a frequência de ressonância será

$$\omega_r = \frac{\theta \cdot v_r}{l} = \frac{\pi \cdot v_s}{l} \text{ (ressonância mecânica).}$$

Para transdutores duplamente acoplados ao vácuo ou ar, a carga mecânica equivalente é vista como curto-circuito (velocidade qualquer e força igual a zero). Isto faz com que os dois indutores do modelo estejam conectados em paralelo. Embora a expressão de X_L tenda para infinito na ressonância, pois

$$X_L = \frac{h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

podemos avaliá-la nas vizinhanças de tal frequência, como

$$\theta = \pi + \Delta, \text{ logo}$$

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi + \Delta}{2}\right)$$

Como

$$\tan(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \text{sen}(b) \cdot \cos(a)}{\cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)}$$

então

$$\tan\left(\frac{\pi + \Delta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{\pi + \Delta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{\pi + \Delta}{2}\right) = -\cot\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

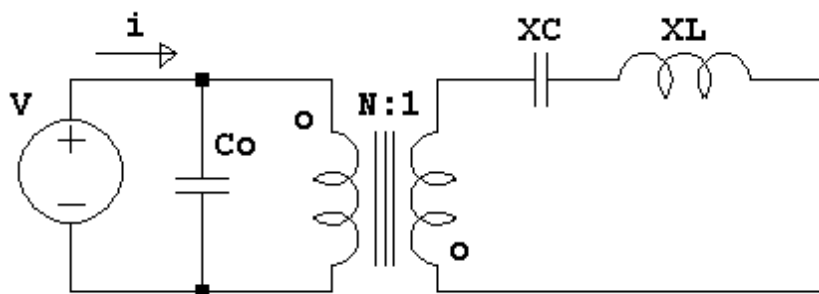
Porém tal função ainda poderia ser expandida em séries de Taylor ($\Delta \rightarrow 0$) como

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi + \Delta}{2}\right) = -\cot\left(\frac{\Delta}{2}\right) = -\frac{2}{\Delta} + \frac{\Delta}{6} + \dots$$

De modo análogo pode ser demonstrado que para $\theta = \pi + \Delta$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi + \Delta)} = -\operatorname{csc}(\Delta) \approx -\frac{1}{\Delta} - \frac{\Delta}{6} + \dots$$

Em tal condição (transdutor duplamente conectado ao ar), o circuito equivalente pode ser reduzido para:



onde

$$X_C = \frac{-j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \left(\frac{-1}{\Delta} - \frac{\Delta}{6}\right)$$

$$X_C = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{\Delta}{6} \right)$$

$$X_L^* = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \left(-\frac{2}{\Delta} + \frac{\Delta}{6} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$X_L^* = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\Delta}{12} \right)$$

A reatância total vista pelo secundário do transformador é então

$$X_{sec} = X_C^* + X_L^* = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \left[\frac{1}{\Delta} + \frac{\Delta}{6} - \frac{1}{\Delta} + \frac{\Delta}{12} \right]$$

$$X_{sec} = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \frac{\Delta}{4} \text{ (comportamento indutivo)}$$

Refletindo-se agora tal reatância para o primário, multiplicando-se por N^2 .

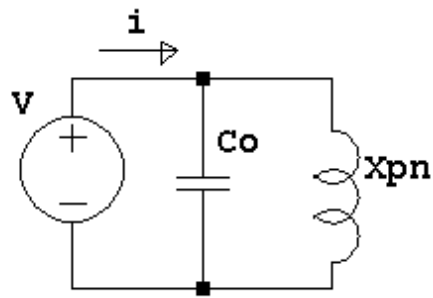
$$X_{pri} = X_{sec} \cdot N^2$$

$$X_{pri} = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \frac{\Delta}{4} \cdot \left(\frac{1}{Y_0 \cdot dp \cdot W} \right)^2$$

$$X_{pri} = \frac{j \cdot h \cdot W}{v_s} \cdot Y_0 \cdot \frac{\Delta}{4} \cdot \frac{1}{Y_0^2 \cdot dp^2 \cdot W^2}$$

$$X_{pri} = \frac{j \cdot h \cdot \Delta}{4 \cdot v_s \cdot Y_0 \cdot dp^2 \cdot W} \text{ (comportamento indutivos)}$$

Então, do ponto de vista elétrico, um transdutor piezoelétrico pode ser visto como o circuito ressonante abaixo



onde $X_{Co} = \frac{-j \cdot 1}{\omega \cdot C_0} = \frac{-j \cdot h}{e \cdot W \cdot l \cdot Y_0 \cdot \omega}$

e, em $\omega = \omega_r$,

$$X_{Co} = \frac{-j \cdot h}{\pi \cdot e \cdot W \cdot Y_0 \cdot v_s}$$

Embora na frequência $\omega = \omega_r$, onde $\Delta = 0$ e $\theta = \pi$, a indutância do modelo devesse se tornar um curto circuito, e a impedância do circuito ir a zero, devido a perda, tal efeito não ocorre, sendo tal impedância limitada a um certo valor R_l . Além disso, também devido a fatores ligados a perdas construtivas, na frequência onde há a ressonância do LC resultante (ω_a) a impedância do circuito também não será infinito. Tal frequência de ressonância pode ser definida com a frequência onde o denominador do paralelo fosse nula. Nesta condição teremos

$$\frac{h}{\pi \cdot e \cdot W \cdot Y_0 \cdot v_s} = \frac{h \cdot \Delta}{4 \cdot Y_0 \cdot W \cdot dp^2 \cdot v_s}$$

ou seja

$$\Delta = \frac{4 \cdot dp^2}{\pi \cdot e}$$

e conseqüentemente

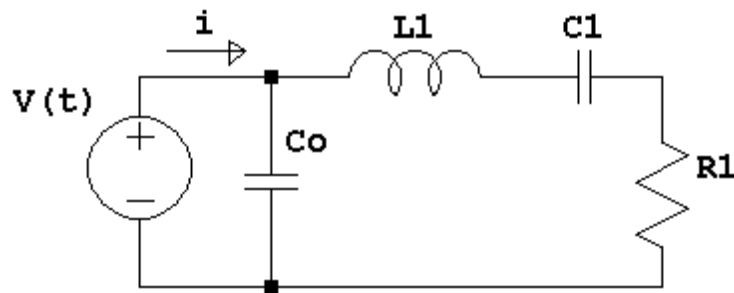
$$\theta_a = \pi + \Delta = \pi + \frac{4 \cdot dp^2}{\pi \cdot e}$$

$$\omega_a = \frac{\theta_2 \cdot v_s}{l} = \frac{\pi \cdot v_s}{l} + \frac{4 \cdot dp^2}{\pi \cdot e} \cdot \frac{v_s}{l} \text{ (ressonância elétrica)}$$

ou seja

$$\omega_a = \omega_r + \frac{4 \cdot dp^2 \cdot v_s}{\pi \cdot e \cdot l}$$

Devido ao fato do circuito equivalente anterior apresentar uma indutância variável (função de Δ) ele é normalmente substituído por um outro que utiliza parâmetros fixos, sendo que o mais utilizado é:



$$\text{onde } C_0 = \frac{2 \cdot W \cdot l \cdot Y_0}{h}$$

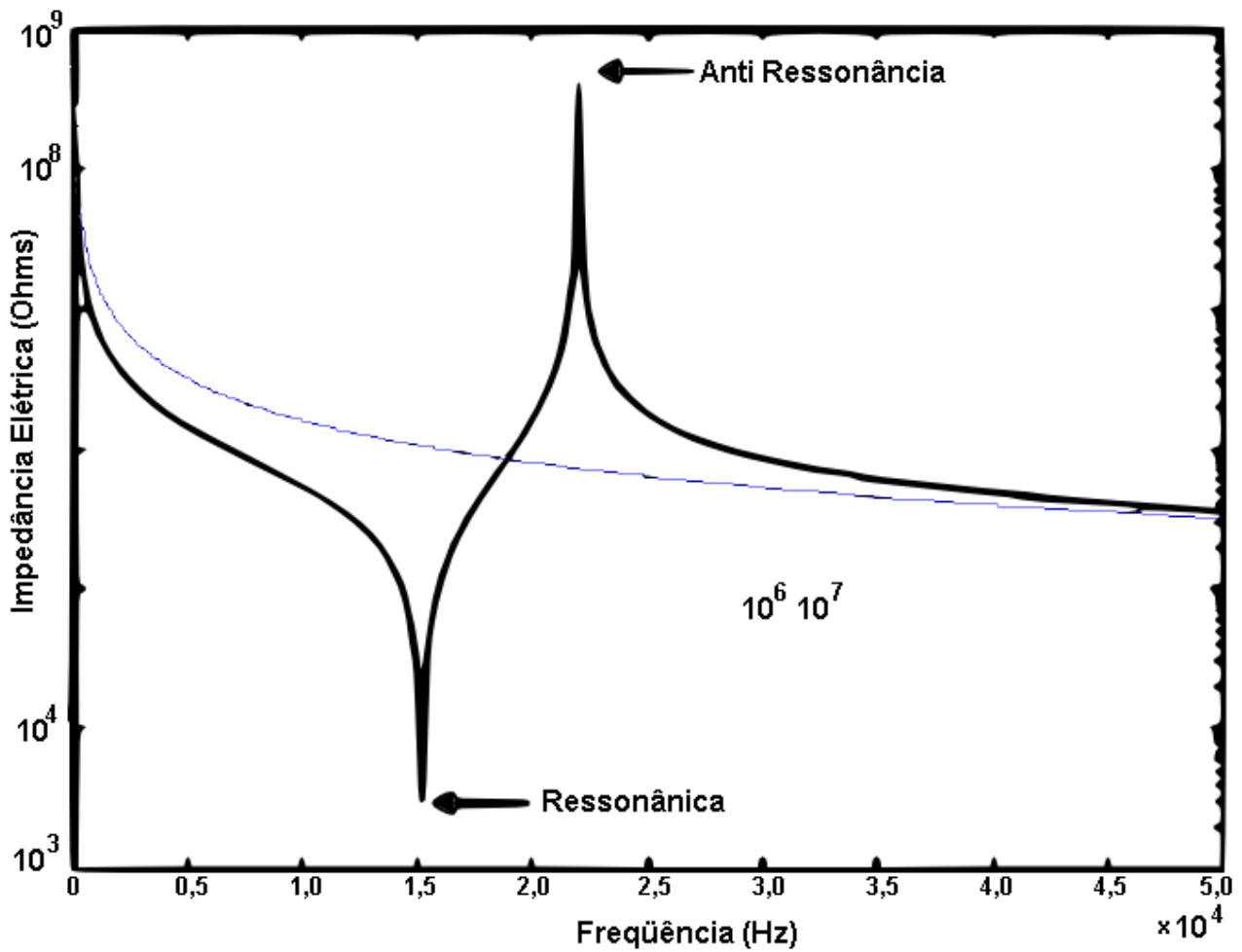
$$L_1 = \frac{h \cdot l}{8 \cdot Y_0 \cdot W \cdot dp^2 \cdot v_s^2}$$

$$C_1 = \frac{8 \cdot dp^2 \cdot l \cdot W \cdot Y_0}{\pi^2 \cdot h}$$

$$\text{onde } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$$

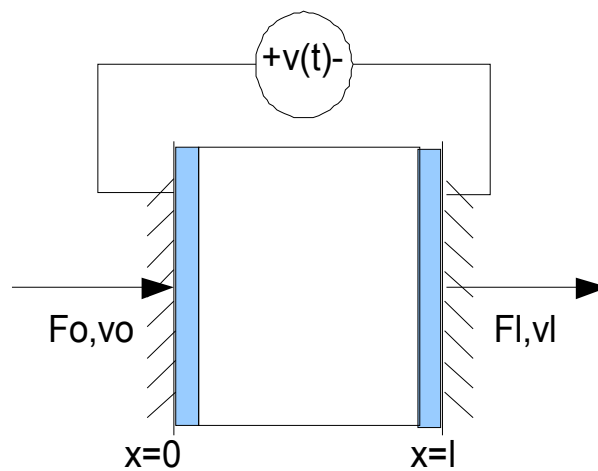
$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot \frac{C_1 \cdot C_0}{C_D + C_1}}}$$

O valor de R_1 deve ser obtido experimentalmente, uma vez que a modelagem realizada não inclui o efeito de perdas internas

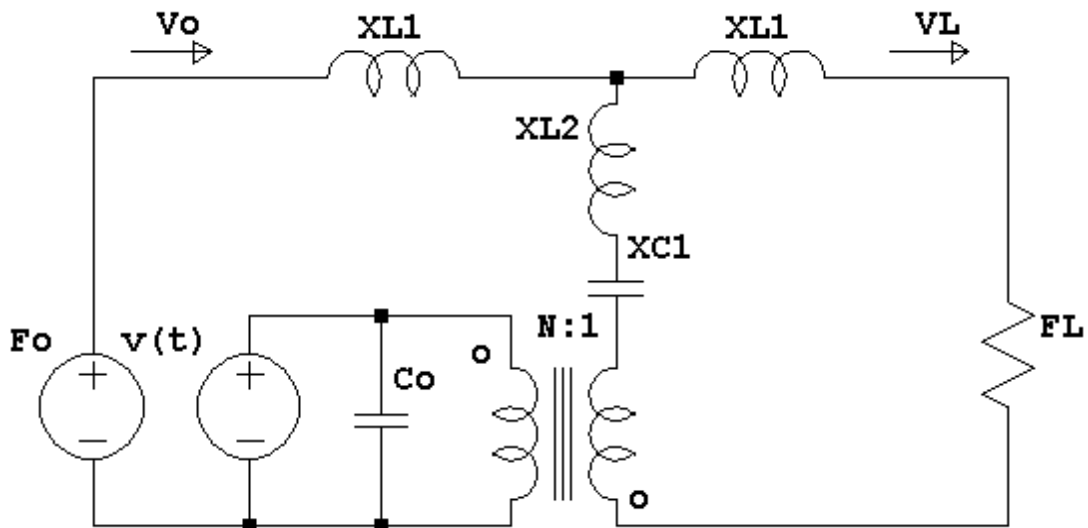


23.2 Transdutor piezoelétrico no modo direto e com carga

O modo transversal anteriormente estudada não é o modo normalmente usado em ultrassom. Em tais aplicações o transdutor está normalmente carregado e opera no chamado modo direto



O modelo elétrico para este caso é



A comparação com o modelo do modo transversal nos mostra que houve o aparecimento de mais uma reatância indutivo que depende tanto das propriedades mecânica, como das propriedades piezoelétricas do transdutor.

Em tal modelo temos

$$\theta = \frac{\omega \cdot l}{v_s} \text{ (como no caso anterior)}$$

$C_0 = \frac{A \cdot e \cdot Y_0}{l}$ (diferente do caso anterior, onde agora A é a área da camada condutora metálica)

$$X_{L1} = \frac{j \cdot A \cdot \zeta}{e \cdot v_s} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

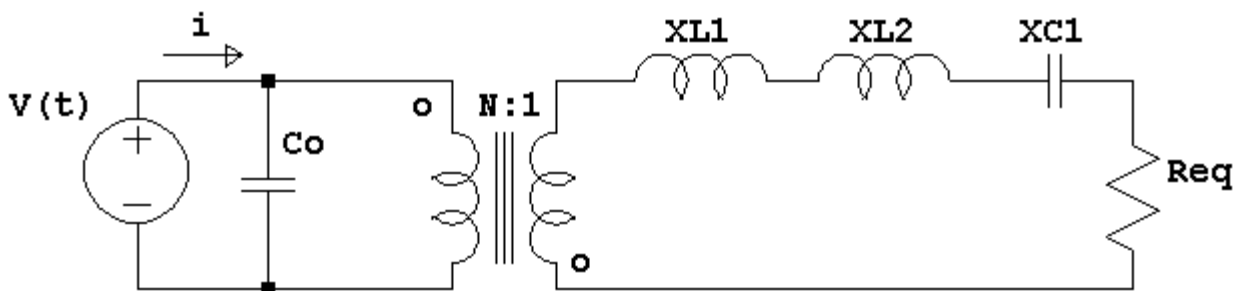
$$X_{L2} = \frac{j \cdot A \cdot dp^2 \cdot Y_0}{e \cdot v_s \cdot \theta}$$

$$X_{C1} = \frac{-j \cdot A \cdot \zeta}{e \cdot v_s \cdot \text{sen}(\theta)}$$

$$N = \frac{l}{A \cdot Y_0 \cdot dp}$$

Embora tais transdutores operem normalmente na ressonância, para obtenção da máxima eficiência mecânica em termos de movimento nem sempre tal fato se dá para uma sintonia em meio comprimento de onda. Consequentemente não podemos utilizar as aproximações para θ , $\tan(\theta/2)$ e $\text{sen}^{-1}(\theta)$, anteriormente demonstrada. Neste caso a solução deve ser obtida por tentativa e erro, ou algum método numérico.

Para vários casos práticos de interesse o circuito equivalente anterior pode ser modificado, combinando-se as indutâncias L_1 em uma única indutância $L_1/2$ e substituindo-se a carga por um equivalente resistivo R_{eq} .



Se tal modelo é considerado válido, então a série $X_{C1} + X_{L1/2}$ resulta em:

$$X_1 = X_{C1} + X_{L1/2} = \frac{-j \cdot A \cdot \zeta}{e \cdot v_s} \cdot \frac{1}{\text{sen}(\theta)} + \frac{j \cdot A \cdot \zeta}{2 \cdot e \cdot v_s} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$X_1 = \frac{j \cdot A \cdot \zeta}{2 \cdot e \cdot v_s} \cdot \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2}{\text{sen}(\theta)} \right]$$

Mas como

$$\text{sen}(\theta) = \frac{2 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

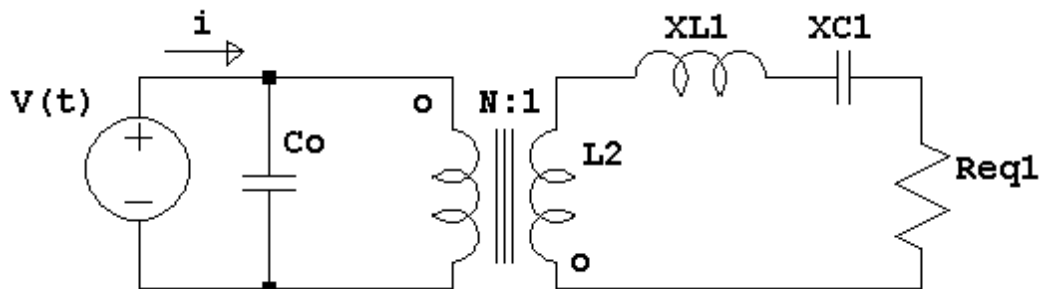
então

$$X_1 = \frac{j \cdot A \cdot \zeta}{2 \cdot e \cdot v_s} \cdot \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{2 \cdot \left[1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]}{2 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right]$$

Logo

$$X_1 = \frac{-j \cdot A \cdot \zeta}{2 \cdot e \cdot v_s} \cdot \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ (reatância capacitiva)}$$

Então o modelo poderia ser redesenhado como:



A reatância total vista pelo secundário do transformador então é

$$X_{sec} = X_1 + X_{L2} = \frac{-j \cdot A \cdot \zeta}{2 \cdot e \cdot v_s \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{j \cdot A \cdot dp^2 \cdot Y_0}{e \cdot v_s \cdot \theta}$$

$$X_{sec} = \frac{j \cdot A}{e \cdot v_s} \cdot \left[\frac{dp^2 \cdot Y_0}{\theta} - \frac{\zeta}{2 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right]$$

Como a ressonância ocorre quando $X_{sec} = 0$ isto implica em

$$\frac{dp^2 \cdot Y_0}{\theta_r} = \frac{\zeta}{2 \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\theta_r = 2 \cdot \tan\left(\frac{\theta_r}{2}\right) \cdot dp^2 \cdot Y_0$$

Tal equação não linear só pode ser resolvida por métodos numéricos e fornece a frequência de ressonância transdutor através de

$$\omega_r = \theta_r \cdot \frac{v_s}{l}$$